SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI**
QUẢNG NINH	**LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2012 – 2013**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN (ngày thứ nhất)
Ngày thi: 16/11/2012
Thời gian làm bài: 180 phút
(không kể thời gian giao đề)

(Đề thi này có 01 trang)

Họ và tên,chữ ký của giám thị số 1
………………………..   ………………………..

Bài 1 *(5 điểm)* :

Tìm các nghiệm số thực của phương trình sau:

$$16x = \sqrt{11 + \frac{1}{16}\sqrt{11 + \frac{1}{16}\sqrt{11 + \frac{1}{16}\sqrt{x + 11}}}}$$

Bài 2 *(5 điểm)* :

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2012;\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^{2013} + 3x_n + 16}{x_n^{2012} - x_n + 11};\ \ \forall n = 1, 2, ...$

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^{2012} + 7}$. Tìm $\lim y_n$

Bài 3 *(5 điểm)* :

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O thỏa mãn các cặp đường thẳng AB và CD, AD và BC, AC và BD lần lượt cắt nhau tại N, M, I. Chứng minh rằng bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OMN, OMI và ONI bằng nhau.

Bài 4 *(5 điểm)* :

Tìm 2011 số nguyên tố sao cho tích các số nguyên tố này bằng tổng các luỹ thừa bậc 2010 của chúng.

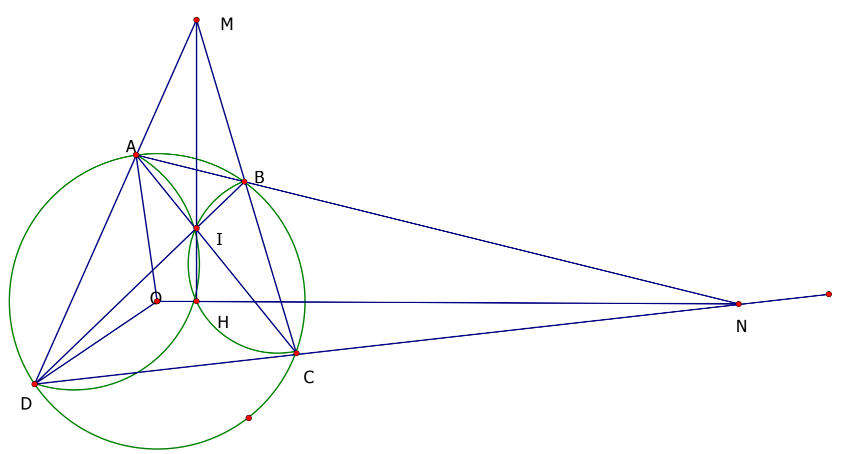
…………………. Hết ………………….

Họ và tên thí sinh : ……………………………… Số báo danh: ………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NINH

HƯỚNG DẪN CHẤM THI LẬP ĐỘI TUYỂN HSG LỚP 12 NĂM HỌC 2012-2013
MÔN TOÁN (ngày thứ nhất). ĐỀ CHÍNH THƯC
(Hướng dẫn chấm này có 03 trang)

Bài	**Sơ lược lời giải**	**Cho điểm**
Bài 1 **5 điểm**	Để phương trình (1) có nghĩa thì x > 0. Đặt u = $\frac{1}{16}\sqrt{11+\frac{1}{16}\sqrt{11+x}}$, u > 0 ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases} 16x=\sqrt{11+\frac{1}{16}\sqrt{11+u}} \\ 16u=\sqrt{11+\frac{1}{16}\sqrt{11+x}} \end{cases}$	1,0
	Nếu x ≥ u suy ra 16u = $\sqrt{11+\frac{1}{16}\sqrt{11+x}} \geq \sqrt{11+\frac{1}{16}\sqrt{11+u}}$ = 16x => x = u Nếu x < u suy ra 16u = $\sqrt{11+\frac{1}{16}\sqrt{11+x}} < \sqrt{11+\frac{1}{16}\sqrt{11+u}}$ = 16x => x>u – vô lý Vậy u = x và ta thu được phương trình: 16x = $\sqrt{11+\frac{1}{16}\sqrt{11+x}}$ (2)	0,5 1,0
	Giải (2): Đặt v = $\frac{1}{16}\sqrt{11+x}$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} 16x=\sqrt{11+v} \\ 16v=\sqrt{11+x} \end{cases}$ Giả sử x ≥ v suy ra 16v = $\sqrt{11+x} \geq \sqrt{11+v}$ = 16x suy ra v = x Nếu x <v suy ra 16v = $\sqrt{11+x} < \sqrt{11+v}$ = 16x (Vô lý) Vậy v = x và ta được phương trình: 16x = $\sqrt{11+x}$ (3)	0,5 1,0
	Giải (3): 16x = $\sqrt{11+x}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 256x^2-x-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{11265}}{512} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{11265}}{512}$ Nghiệm trên >0. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1+\sqrt{11265}}{512}$	1,0
Bài 2 **5 điểm**	Đặt m = 2012 và f(x) = $\frac{x^{m+1}+3x+16}{x^m-x+11}$ Khi đó ta có $x_{n+1}=f(x_n)\,\forall n=1,2,...$ $f(x)=\frac{x^{m+1}+3x+16}{x^m-x+11}=x+\frac{x^2-8x+11}{x^m-x+11}$ (*); f(x)-4= $\frac{x^{m+1}+3x+16}{x^m-x+11}$ -4= $\frac{(x-4)(x^m+7)}{(x^m+7)-(x-4)}$ Với x > 4 thì ta có: $\frac{1}{f(x)-4}=\frac{(x^m+7)(x-4)}{(x-4)-(x^m+7)}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x^m+7}$	1,0 0,5

Bài	Sơ lược lời giải	Cho điểm
Bài 2 (tiếp)	Bằng qui nạp theo n ta chứng minh được: $x_n \geq 2012; \forall n \geq 1$ và $\frac{1}{x_n^m+7}=\frac{1}{x_n-4}-\frac{1}{x_{n+1}-4} \forall n \geq 1$ Từ công thức của dãy và (*) ta rút ra: 2012 = $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ suy ra (x_n) tăng	1,25
	Giả sử dãy số (x_n) bị chặn trên do đó tồn tại $\lim x_n = a\,(a \succ 2012)$, chuyển qua phương trình giới hạn ta được: $a=\frac{a^{m+1}+3a+16}{a^m-a+11} \Leftrightarrow a^2-8a+16=0 \Leftrightarrow a=4$ (vô lý) Suy ra $\lim x_n = +\infty$	1,25
	$y_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^m+7}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_i-4}-\frac{1}{x_{i+1}-4}))=\frac{1}{x_1-4}-\frac{1}{x_{n+1}-4}=\frac{1}{2008}-\frac{1}{x_{n+1}-4} \to \frac{1}{2008}$ khi n $\to +\infty$. Vậy $\lim y_n = \frac{1}{2008}$	1,0
Bài 3 5 điểm		
	* Ta sẽ chứng minh O là trực tâm tam giác IMN. Trước hết chứng minh $IM \perp ON$: Gọi H là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác AID và đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC Ta có $\overline{MD}.\overline{MA}=\overline{MB}.\overline{MC}$ suy ra M thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp tứ giác AIHD và BIHC nên M, I, H thẳng hàng.	1,0
	Xét tứ giác DOHC, ta có: $\widehat{DHC}=360^0-\widehat{DHI}-\widehat{IHC}=\widehat{DAC}+\widehat{DBC}=\widehat{DOC}$ suy ra tứ giác DOHC nội tiếp. Tương tự, tứ giác AOHB nội tiếp Hơn nữa ta có: $\overline{NA}.\overline{NB}=\overline{NC}.\overline{ND}$ suy ra N thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp các tứ giác AOHB và DOHC. Nên O, H, N thẳng hàng.	1,0

Bài	Sơ lược lời giải	Cho điểm
Bài 3 (tiếp)	Ta có: $I\hat{H}O = I\hat{H}D - O\hat{H}D = (180^0 - D\hat{A}C) - O\hat{C}D = A\hat{D}C + A\hat{C}D - O\hat{C}D = A\hat{D}C + O\hat{C}A = 90^0$ Suy ra $IM \perp ON$ (do O, H, N thẳng hàng và M, I, H thẳng hàng)	1,0
	Chứng minh tương tự $IN \perp OM$. Do đó O là trực tâm tam giác IMN	1,0
	Áp dụng bài toàn quen thuộc về trực tâm tam giác, suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác $\triangle$OMN; $\triangle$OMI; $\triangle$ONI bằng nhau. (đpcm!)	1,0
Bài 4 5 điểm	Gọi các số nguyên tố cần tìm là $P_1, P_{2,....,} P_{2011}$, theo giả thiết thì: $\prod_{i=1}^{2011} P_i = \sum_{i=1}^{2011} P_i^{2010}$ (*) Giả sử trong các số nguyên tố trên có k số khác 2011; 0 ≤ k ≤ 2011. Ta xét các trường hợp sau: 1) k = 0, nghĩa là tất cả các số đều bằng 2011. Khi đó ta có $\prod_{i=1}^{2011} 2011 = \sum_{i=1}^{2011} 2011^{2010}$ Vì 2011 là số nguyên tố nên $p_i = 2011; i = 1; 2; .....; 2011,$ là 2011 số nguyên tố thoả mãn yêu cầu bài toán.	1,0
	2) k = 2011, nghĩa là tất cả các số p_i đều khác 2011. Khi đó do p_i là các số nguyên tố khác 2011 nên (p_i; 2011) = 1. Theo định lý Fecma nhỏ thì $p_i^{2010} \equiv 1(\bmod 2011), i = \overline{1, 2011}$ Do đó , $\sum_{i=1}^{2011} P_i^{2010} \equiv 2011(\bmod 2011)$ trong đó $\prod_{i=1}^{2011} p_i$ không chia hết cho 2011 (vô lý)	2,0
	3) $1 \le k \le 2010$, nghĩa là có 2011-k số bằng 2011. Khi đó trong 2011 số hạng bên vế phải của (*) có k số khi chia cho 2011 dư 1 và 2011-k số còn lại chia hết cho 2011. Do vậy $\sum_{i=1}^{2011} P_i^{2010} \equiv k(\bmod 2011) \Rightarrow \sum_{i=1}^{2011} P_i^{2010}$ không chi hết cho 2011, trong khi đó dễ thấy $\prod_{i=1}^{2011} p_i$ chia hết cho 2011 (mâu thuẫn).	1,75
	Vậy có duy nhất 2011 số nguyên tố thoả mãn, đó là 2011 số nguyên tố 2011.	0,25

Các chú ý khi chấm:

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược bài giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thông nhất chi tiết nhưng không được quá số điểm dành cho câu, phần đó.

2. Có thể chia điểm thành từng phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm. Không làm tròn điểm

3. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NINH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NINH

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2012 – 2013

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN (ngày thứ hai)
Ngày thi: 17/11/2012
Thời gian làm bài: 180 phút
(không kể thời gian giao đề)

(Đề thi này có 01 trang)

Họ và tên,chữ ký của giám thị số 1
………………………..   ………………………..

Bài 1 *(5 điểm)* :

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn: $3(a^2+b^2+c^2)-7(a+b+c)+12=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $(a^{2012}-a^{2010}+3)(b^{2012}-b^{2010}+3)(c^{2012}-c^{2010}+3)$

Bài 2 *(5 điểm)* :

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đẳng thức sau:

$$f[(1+f(x))f(y)]=y+x.f(y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Bài 3 *(5 điểm)* :

Cho ΔABC cân tại A, gọi D là trung điểm cạnh AC. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn đi qua ba điểm B, D, C tại điểm E nằm trong ΔABC. Đường thẳng BD cắt đường tròn qua A, E, B tại hai điểm B và F. Hai đường thẳng AF và BE cắt nhau tại I, hai đường thẳng CI và BD cắt nhau tại K. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp ΔKAB.

Bài 4 *(5 điểm)* :

Cho đa giác đều 2n cạnh (n≥4) nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi x là số tứ giác có 4 cạnh là 4 đường chéo của đa giác đã cho và y là số hình chữ nhật có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho. Tìm n để: x – y = 3n.

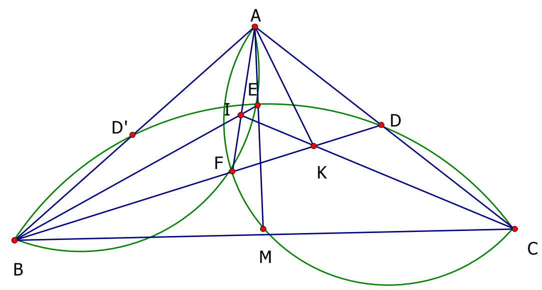
…………………. Hết ………………….

Họ và tên thí sinh : ……………………………… Số báo danh: ………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NINH

HƯỚNG DẪN CHẤM THI LẬP ĐỘI TUYỂN HSG LỚP 12 NĂM HỌC 2012-2013
MÔN TOÁN (ngày thứ hai). ĐỀ CHÍNH THƯC
(Hướng dẫn chấm này có 03 trang)

Bài	**Sơ lược lời giải**	**Cho điểm**
Bài 1 **5 điểm**	Ta có $3(a^2+b^2+c^2)\geq\left(a+b+c\right)^2$ Kết hợp với giả thiết, suy ra $(a+b+c)^2-7(a+b+c)+12\leq 0 \Leftrightarrow 3\leq a+b+c\leq 4$ (1)	1,0
	Mặt khác ta có: $(a^{2010}-1)(a^2-1)\geq 0 \Leftrightarrow a^{2012}-a^{2010}+3\geq a^2+2$ Tương tự ta có: $b^{2012}-b^{2010}+3\geq b^2+2; c^{2012}-c^{2010}+3\geq c^2+2$ Suy ra P $\geq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$ (2)	1,0
	Ta sẽ chứng minh: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2$ Thật vậy, ta có $(a+b+c)^2=(a.1+\sqrt{2}.\dfrac{b+c}{\sqrt{2}})^2\leq(a^2+2)(1+\dfrac{(b+c)^2}{2})$ mà $(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(1+\dfrac{b+c^2}{2})\Leftrightarrow(bc-1)^2+(bc-1)^2\geq 0$ - hiển nhiên đúng nên: $3\,(a+b+c)^2\leq 3(a^2+2)(1+\dfrac{(b+c)^2}{2})\leq(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$ (3)	1,0 1,0
	Từ (1), (2), (3) suy ra $P\geq 27$, dấu '=' xảy ra khi và khi chỉ khi a=b=c=1 Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 27, đạt được khi và chỉ khi a=b=c=1	1,0
Bài 2 **5 điểm**	$f[(1+f(x))f(y)]=y+x.f(y),\ \forall x,y\in R$ (1) Thay x=0 vào (1) được: $f[(1+f(0))f(y)]=y,\ \forall\ y\in R$ (2) => f là một song ánh Do đó tồn tại c sao cho f(c)=0, khi đó thay y = c vào (2) ta có f(0)=c	1,0
	Thay y=0 vào (2) và cùng với f(0)=c ta được f((1+c)c)=0 suy ra f((1+c)c)=f(c) <=> (1+c)c=c $\Leftrightarrow c=0$ (vì f là hàm đơn ánh). Do đó f(0)=0. Từ (2) suy ra f(f(y)) = y $\forall\ y\in R$ (3)	1,0
	Từ giả thiết, thay x bởi f(x) và thay y bởi f(y) ta được: f[y(1+x)]= f(y) + y.f(x), $\forall x,y\in R$ (4)	1,0
	Từ (4) thay x = -1 và đặt $a=f(-1)$ ta có f(0)= f(y)+a.y $\forall\ y\in R$ suy ra f(y) = -ay Thay vào (3), ta có $a^2y=y,\forall y\in R\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$	1,0
	Thử lại cả hai hàm số f(x)=x và f(x)=-x đều thỏa mãn phương trình hàm đã cho. Vậy các hàm số cần tìm là: f(x)=x và f(x)=-x	1,0

<table>
<tr><td>Bài 3
5 điểm</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Gọi D’ là trung điểm của AB và M là trung điểm cạnh BC.
Ta có D’ nằm trên đường tròn ngoại tiếp △BCD. Do tính đối xứng nên suy ra $\widehat{D'E}=\widehat{ED}$ suy ra $\widehat{ABI}=\widehat{D'BE}=\widehat{EBD}=\widehat{IBK}$ suy ra I nằm trên phân giác góc $\widehat{ABK}$ hay BI là tia phân giác góc $\widehat{ABK}$ (1)</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có: $\widehat{DFA}=180^o-\widehat{BFA}=180^O-\widehat{BEA}=\widehat{MEB}=\frac{1}{2}\widehat{CEB}=\frac{1}{2}\widehat{CDB}$
=> $\widehat{DFA}=\widehat{DAF}$ suy ra △AFD cân tại D.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Áp dụng định lý Menelauyt cho △ADF với 3 điểm thẳng hàng C, I, K và áp dụng tính chất của phân giá góc $\widehat{ABF}$. Ta có:
$1=\frac{AC}{CD}.\frac{DK}{KF}.\frac{FI}{IA}=2\frac{DK}{KF}.\frac{BF}{AB}=2.\frac{DK}{KF}.\frac{BF}{2AD}=\frac{DK}{KF}.\frac{BF}{AD}$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Vì vậy $\frac{BD}{AD}=\frac{BF+FD}{AD}=\frac{BF}{AD}+1=\frac{DF}{DK}=\frac{AD}{DK}$ Suy ra
△ADK ∽ △BDA$\Rightarrow\widehat{DAK}=\widehat{ABD}$.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Vì vậy $\widehat{IAB}=\widehat{AFD}-\widehat{ABD}=\widehat{DAF}-\widehat{DAK}=\widehat{KAI}$ $\Rightarrow$I nằm trên phân giác $\widehat{BAK}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>Bài 4
5 điểm</td><td>Gọi các đỉnh của đa giác đều 2n cạnh là: $A_1;A_2;....;A_{2n}$. Trước hết ta tìm x
Ta đếm số các tứ giác thoả mãn yêu cầu bài toán có 1 đỉnh là A_1
Khi đó A_2; A_{2n} không phải là đỉnh của tứ giác vì A_1 A_2; A_1 A_{2n} là các cạnh của đa giác. Ta cần chọn thêm các đỉnh: $A_i;A_j;A_k$ thoả mãn $5\le i+2<j+1<k\le 2n-1$ (Vì giữa 2 đỉnh của tứ giác phải có ít nhất 1 đỉnh của đa giác).</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Mỗi cách chọn bộ 3 đỉnh trên là 1 cách chọn bộ 3 số phân biệt trong 2n-5 số tự nhiên từ 5 đến 2n-1.
Vậy có C_{2n-5}^3 tứ giác có đỉnh A_1 thoả mãn yêu cầu bài toán.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Vì đa giác có 2n đỉnh và mỗi tứ giác được đếm lặp lại 4 lần theo 4 đỉnh nên số tứ giác cần tìm là: $\frac{2nC_{2n-5}^3}{4}$, do đó x=$\frac{2nC_{2n-5}^3}{4}$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Tìm y: do đa giác đều đã cho có 2n đỉnh nên nó có n đường chéo đi qua tâm O
Ta thấy cứ hai đường chéo bất kì qua O lập thành một hình chữ nhật, nên số hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác đều đã cho là C_n^2, do đó y = C_n^2.</td><td>1,0</td></tr>
</table>

	Từ giả thiết ta có phương trình: $\frac{2nC_{2n-5}^{3}}{4}$ - C_n^2 = 3n (1) $(1) \Leftrightarrow \frac{n}{2}.\frac{(2n-5)!}{(2n-8)!3!} - \frac{n!}{(n-2)!2!} = 3n \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{(2n-7)(2n-6)(2n-5)}{6} - \frac{n-1}{2} = 3$ $\Leftrightarrow (n-5)(n^2-4n+6) = 0 \Leftrightarrow n = 5$ Vậy n=5 thỏa mãn điều kiện bài toán	1,0

Các chú ý khi chấm:

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược bài giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thông nhất chi tiết nhưng không được quá số điểm dành cho câu, phần đó.

2. Có thể chia điểm thành từng phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm. Không làm tròn điểm

3. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NINH