MỘT SỐ KINH NGHIỆM KHI DẠY HỌC
PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Nguyễn Thanh Thảo, chuyên viên phòng GDTrH, Sở GD&ĐT Quảng Ninh.

Phương trình mũ và phương trình lôgarit là nội dung rất quan trọng trong các kỳ thi tốt nghiệp và đại học cao đẳng. Các dạng bài tập cũng rất phong phú như giải phương trình, chứng minh nghiệm của phương trình thỏa mãn các điều kiện cho trước (tồn tại, tồn tại duy nhất, hữu hạn nghiệm,…), giải và biện luận phương trình theo tham số, chứng minh phương trình tương đương,…

CÁC PHƯƠNG PHÁP

Các phương pháp thường dùng để giải phương trình mũ và phương trình lôgarit là:

- Đưa về các phương trình mũ và lôgarit cơ bản, bao gồm các cách:
  1) Đưa về cùng một cơ số;
  2) Đặt ẩn phụ;
  3) Mũ hóa (hoặc lôgarit hóa).
- Phương pháp đồ thị.
- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số mũ và lôgarit.

Ngoài ra, còn một số phương pháp giải khác như phương pháp biến thiên hằng số, sử dụng đinh lí Lagrange, định lý Rolle, đánh giá, phương pháp hàm số,… Sau đây chúng ta sẽ đi vào từng nội dung cụ thể.

Bài viết này giới thiệu phương pháp đưa về phương trình mũ, lôgarit cơ bản. Đây là phương pháp rất cơ bản, thường được sử dụng. Các cách để đưa về phương trình mũ, lôgarit cơ bản là đưa về cùng một cơ số, đặt ẩn phụ, mũ hóa hoặc lôgarit hóa. Dưới đây là các ví dụ đơn giản, quen thuộc, được lấy từ sách giáo khoa và sách bài tập Giải tích12 nhằm *minh họa cho cách đưa về cùng cơ số để biến đổi thành phương trình mũ, lôgarit cơ bản*. Tuy nhiên ngay cả bài toán đơn giản nhất ta cũng nên xem xét dưới nhiều góc độ, khai thác, tìm tòi cách này, cách kia... để học sinh được luyện tập nhiều, khắc sâu kiến thức, tránh dập khuôn máy móc và còn để liên hệ với những bài tập khó hơn, học sinh (HS) hiểu rằng các bài tập phức tạp bắt đầu từ các bài tập hết sức đơn giản.

Phương trình mũ cơ bản

Dạng 1. Phương trình $a^{f(x)} = b\ (a > 0, a \neq 1)$

Với $b > 0, a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$

Với $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

Dạng 2. Phương trình $a^{f(x)} = a^{g(x)}\ (a > 0, a \neq 1)$

Phương trình tương đương với $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 1. Giải các phương trình mũ sau

a) $3^{x^2-4x+5} = 9$

b) $1{,}5^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

c) $0{,}125.4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{8}\right)^{-x}$

d) $2^{2x-1} + 4^{x+2} = 10$

Hướng dẫn.

Kỹ năng cần thiết đối với HS khi làm bài tập loại này là việc phát hiện ra cơ số thích hợp.

a) **Giải.** Đưa hai vế về cùng cơ số 3, ta được phương trình đã cho tương đương với: $3^{x^2-4x+5} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2^{(1)} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. Giải phương trình bậc hai này được hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 3$.

Nhận xét.

① *Phương trình (a) có dạng 1, ta viết* $(a) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = \log_3 9$

② *Ta cũng có thể hiểu là lấy lôgarit hai vế với cơ số* 3 *để được phương trình trên. Hơn nữa, <u>nếu lấy lôgarit hai vế với cơ số a (a > 0, a ≠ 1) bất kỳ thì vẫn tìm được ra nghiệm bài toán.</u> Cụ thể, (a)* $\Leftrightarrow log_a 3^{x^2-4x+5} = log_a 9 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 5)\, log_a 3 = log_a 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = log_3 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2^{(1)}$. *Như vậy nếu <u>chọn được số a thích hợp sẽ tránh việc tính toán phức tạp</u>. Việc lấy logarit đã khử được ẩn ở mũ.*

③ *Với nhận xét ②, ta có thể giải quyết được lớp các phương trình phức tạp hơn* $a^{f(x)} = b^{g(x)}, (0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$ *bằng cách lấy lôgarit hai vế với cơ số nào đó, chẳng hạn cơ số* a, *đưa phương trình* $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ *về thành* $f(x) = g(x) \cdot log_a b$.

Hoặc với ý tưởng đưa các lũy thừa về cùng một cơ số, ta có $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow a^{f(x)} = (a^{log_a b})^{g(x)} \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^{log_a b \cdot g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot log_a b$.

Lớp các phương trình $k \cdot a^{f(x)} = h \cdot b^{g(x)}, (0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1; k, h \in \mathbb{R})$ *cũng có thể làm tương tự.*

④ *Trường hợp đặc biệt của dạng trên, phương trình dạng* $k \cdot a^{f(x)} = h \cdot b^{f(x)}, (0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1; k \neq 0)$ *có thể đưa về dạng 1 bằng biến đổi,* $k \cdot a^{f(x)} = h \cdot b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \frac{h}{k}$

b) *Nhận thấy,* $\frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = 1{,}5^{-1}$, *phương trình trên sẽ có dạng 2.*

Giải. Đưa về cùng cơ số 1,5, phương trình đã cho tương đương với: $1{,}5^{5x-7} = 1{,}5^{-x-1} \Leftrightarrow 5x - 7 = -x - 1 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

c) *Đối với phương trình này ta đưa hai vế về cùng cơ số* 2 *sẽ được dạng 2.*

d) *Hai hạng tử vế trái là đồng dạng (dạng* $t.4^x, t \in \mathbb{R}$*) nên sẽ rút gọn được vế trái để đưa phương trình về dạng 1.*

Giải. Phương trình đã cho tương đương với $\frac{1}{2} \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x = 10 \Leftrightarrow \frac{33}{2} \cdot 4^x = 10 \Leftrightarrow 4^x = \frac{20}{33} \Leftrightarrow x = \log_4 \frac{20}{33}$. Vậy $x = \log_4 \frac{20}{33}$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2. Giải các phương trình mũ sau

a) $7^{x-1} = 2^x$;

b) $8^{\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 2} = 4^{x^2+x+1}$;

c) $0{,}75^{2x-3} = \left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$;

d) $5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$.

Hướng dẫn.

a) *Từ nhận xét ③, (a)* $\Leftrightarrow log_7 7^{x-1} = log_7 2^x \Leftrightarrow x - 1 = log_7 2 \cdot x$. *Hoặc,*

từ nhận xét ④, (a) $\Leftrightarrow \frac{1}{7} \cdot 7^x = 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^x = 7$

b) *Đưa hai vế về lũy thừa cơ số 2 hoặc lấy logarit cơ số 2 hai vế (cơ số 2 là tối ưu nhất).*

c) *Tương tự câu b) với cơ số* $\frac{3}{4}$

d) *Vế trái gồm các hạng tử đồng dạng với* 5^x*, tương tự vế phải là* 2^x. *Rút gọn hai vế và làm theo nhận xét ④.*

<u>Phương trình lôgarit cơ bản</u>

Dạng 1. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b, (f(x) > 0)$

Dạng 2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x), (f(x) > 0)$

Dạng 2 cũng là trường hợp riêng ($log_a h(x) = 0$) của dạng 1 nhưng thực tế lời giải hay đưa tới dạng này nên ta đặt thành dạng riêng.

Các công thức cần nhớ

Cho $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$

<u>Các quy tắc tính lôgarit</u>

❶ Lôgarit của một tích $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

❷ Lôgarit của một thương $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

❸ Lôgari của một lũy thừa $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b,\ (\alpha \in \mathbb{R})$

<u>Đổi cơ số</u>

❹

a) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, (c \neq 1)$

b) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (b \neq 1)$

c) $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b, (\alpha \neq 0)$

Ví dụ 1. Giải các phương trình lôgarit sau

a) $\log x + \log(x + 9) = 1$;
b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;
c) $\log_5 x^3 + 3\log_{25} x + \log_{\sqrt{125}} \sqrt{x^3} = \frac{11}{2}$;
d) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$;

Hướng dẫn.

Khi chữa bài GV cần nhấn mạnh hai vấn đề chính: 1) hướng giải quyết; 2) dùng công thức nào để biến đổi (giúp HS thành thạo các quy tắc tính lôgarit).Việc nêu ý tưởng lời giải cần mạch lạc, có đường lối rõ ràng để học sinh dễ dàng nắm bắt, qua đó có thể tự làm được các bài tập tượng tự và khó hơn. GV cũng cần ý thức cho HS đặt điều kiện cho *các biểu thức dưới dấu lôgarit, đặt điều kiện cho các biểu thức trong phương trình có nghĩa.*

a) Dùng quy tắc ❶ tính lôgarit của một tích để đưa về dạng 1. Chú ý đặt điều kiện cho các biểu thức dưới dấu lôgarit.
b) Dùng công thức ❹c) đổi cơ số để đưa ba logarit về thành đồng dạng (dạng $t.\log_2 x, t \in \mathbb{R}$). Sau đó rút gọn đưa về dạng 1, $\log_2 x = b$.
c) Dùng quy tắc ❸ tính lôgarit của một lũy thừa, để đưa ba lôgarit trên có cùng một biểu thức dưới dấu logarit, các lôgarit giờ chỉ khác nhau về cơ số. Bài toán lúc này tương tự câu b).
d) Dùng công thức ❹a) và có thể ❹c) đổi cơ số để đưa ba lôgarit về thành đồng dạng, dù chọn cơ số nào cũng đều có lời giải, nhưng nếu chọn cơ số 2 sẽ đơn giản cho tính toán. Làm tiếp giống câu b).

Ví dụ 2. Giải các phương trình lôgarit sau

a) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$;
b) $\log x^4 + \log(4x) = 2 + \log x^3$;
c) $\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log \sqrt[3]{x-40}} = 3$;
d) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$.

Giải.

a) Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \\ x+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$.
Phương trình tương đương với: $\ln[(x+1)(x+3)] = \ln(x+7) \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=1$. Kết hợp với điều kiện ta được $x=1$ là nghiệm của phương trình.

b) *Sử dụng quy tắc ❶ cho hai vế để đưa phương trình về dạng 2, hoặc dùng quy tắc ❶ và ❸ đưa ba logarit này về đồng dạng với* $\log x$ *để rút gọn sẽ được phương trình dạng 1.*

Với điều kiện $x>0$, phương trình tương đương với: $\log(x^4.4x) = \log(10^2x^3) \Leftrightarrow 4x^5 = 100x^3 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$ (do $x>0$).

Hoặc biến đổi như sau: (b) $\Leftrightarrow 4\,log\,x + log\,4 + log\,x = 2 + 3\,log\,x \Leftrightarrow$
$2\,log\,x = 2 - log\,4 \Leftrightarrow 2\,log\,x = log\,100 - log\,4 \Leftrightarrow 2\,log\,x = log\,25 \Leftrightarrow$
$2\,log\,x = log\,5^2 \Leftrightarrow log\,x = log\,5 \Leftrightarrow x = 5$.

Giáo viên nên khuyến khích học sinh làm bài theo nhiều cách để tạo sự linh hoạt trong tư duy. Những biến đổi trên có vẻ như rườm rà nhưng những biến đổi đơn giản đó rất tốt để khắc sâu công thức và hoàn thiện kỹ năng tính toán cho học sinh, nhất là khi bắt đầu học về dạng bài này. GV không nên câu nệ "cách dài", "cách ngắn", mỗi cách giải đều có những ưu điểm riêng của nó.

c) Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{x-40} > 0 \\ \log \sqrt[3]{x-40} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x > 40 \\ x-40 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 40 \\ x \neq 41 \end{cases}$

Với điều kiện trên ta biến đổi phương trình như sau:

$\log(\sqrt{x+1}+1) = 3\log\sqrt[3]{x-40} \Leftrightarrow \log(\sqrt{x+1}+1) = \log(x-40) \Leftrightarrow$ $\sqrt{x+1}+1 = x-40 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-41 \Leftrightarrow \begin{cases} x-41 \geq 0 \\ x+1 = (x-41)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x \geq 41 \\ x^2-83x+1680 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 41 \\ \left[\begin{array}{l} x = 48 \\ x = 35 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 48$. Vậy $x = 48$ là nghiệm của phương trình.

Tuy nhiên, nếu dùng công thức đổi cơ số ❹a) *cho vế trái, ta cũng có một lời giải khác 'hết sức tự nhiên':* $\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}} = 3 \Leftrightarrow \log_{\sqrt[3]{x-40}}(\sqrt{x+1}+1) = 3 \Leftrightarrow$ $\left(\sqrt[3]{x-40}\right)^3 = \sqrt{x+1}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-41$

d) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \\ \log_4 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Nhận thấy các hạng tử của vế trái đồng dạng với $log_2\, log_2\, x$.

Rút gọn vế trái:

$\log_4\log_2 x + \log_2\log_4 x = \frac{1}{2}\log_2\log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = \frac{1}{2}\log_2\log_2 x +$ $\log_2\frac{1}{2} + \log_2\log_2 x = \frac{3}{2}\log_2\log_2 x - 1$. Dó đó, phương trình đã cho tương đương với $\frac{3}{2}\log_2\log_2 x = 3 \Leftrightarrow \log_2\log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16.$

GV nên chú ý cho HS về việc phát hiện và biến đổi các hạng tử thành đồng dạng để có thể rút gọn. Từ lời giải ví dụ trên, GV có thể xây dựng các ví dụ tương tự, chẳng hạn với $log_3\, log_7\, x$, ta đưa ra một biểu thức gồm các hạng tử đồng dạng với nó như: $log_{\frac{1}{3}}\, log_7\, x^3 + log_3(log_7\, x \cdot log_{\sqrt[3]{7}}\, x^2)$. Ta có, $log_{\frac{1}{3}}\, log_7\, x^3 +$

$log_3(log_7 x \cdot log_{\sqrt[3]{7}} x^2) = -log_3(3 \cdot log_7 x) + log_3 log_7 x + log_3(6 \cdot log_7 x) = -1 + log_3 6 + log_3 log_7 x = log_3 2 + log_3 log_7 x$. Khi đó, có thể đưa ra bài toán: Giải phương trình: $log_{\frac{1}{3}} log_7 x^3 + log_3(log_7 x \cdot log_{\sqrt[3]{7}} x^2) = 1$. Với điều kiện $x > 1$, phương trình này tương đương với $log_3 log_7 x = log_3 \frac{3}{2}$ hay $log_7 x = \frac{3}{2}$. Bài toán có nghiệm $x = \sqrt{343}$.

Bài tập. Giải phương trình $x^{\log 9} + 9^{\log x} = 6$

Giải. Điều kiện: $x > 0$. Nhận thấy $\log x^{\log 9} = \log 9 \cdot \log x$ và $\log 9^{\log x} = \log x \cdot \log 9$. Do đó $\log x^{\log 9} = \log 9^{\log x}$ hay $x^{\log 9} = 9^{\log x}$. Suy ra phương trình tương đương với $9^{\log x} = 3 \Leftrightarrow 2\log x = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$. Vậy phương trình có một nghiệm $x = \sqrt{10}$.

Để giúp HS luyện tập, GV nên yêu cầu HS giải thêm phương trình $x^{log\,9} = 3$. Ta có, $x^{log\,9} = 3 \Leftrightarrow x = 3^{\frac{1}{log\,9}}$. Biến đổi $3^{\frac{1}{log\,9}} = 3^{log_9 10} = 9^{\frac{1}{2} \cdot log_9 10} = \sqrt{10}$.

Nhận xét.

- *Từ lời giải trên rút ra công thức $a^{log_b c} = c^{log_b a}, (a, b, c > 0, b \neq 1)$.*
- *Với công thức này GV có thể nghĩ thêm bài tập để HS vận dung. Chẳng hạn, xuất phát từ công thức $x^{log\,25} = 5^{log\,x^2}, (x > 0)$, GV đưa ra phương trình $x^{log\,25} + 5^{log\,x^2+1} = 6$. Rõ ràng các lũy thừa của vế trái đồng dạng với $5^{log\,x^2}$, như vậy rút gọn vế trái để đưa về phương trình mũ cơ bản.*

GV khi chữa một bài tập dù bài đó đơn giản đến mấy cũng nên để lại một dấu ấn nào đó cho HS, chẳng hạn, nếu bài này không đặt điều kiện thì sẽ xuất hiện nghiệm ngoại lai, hay cách giải này có thể làm được lớp các bài tập như thế nào, đề xuất ngay một ví dụ trên lớp để học sinh tự giải, hay đưa ra một cách giải khác của bài đó... Sau mỗi bài tập được chữa, học sinh cần có "khoảng chững" nhất định để "ngấm" kiến thức, đó cũng là lúc GV và HS cùng nhìn lại lời giải, đưa ra những nhận xét,đánh giá, mở rộng... từ bài tập vừa làm. Cách tốt nhất để HS học toán tiến bộ nhanh là có thể tự mình làm được càng nhiều bài tập các tốt. Ở bài viết này tôi không muốn đề cập đến kiến thức phục tạp mà chỉ là nhưng kinh nghiệm nhỏ khi dạy các bài tập rất cơ bản và quen thuộc cho HS.

Tài liệu tham khảo

1. Sách Giải tích 12
2. Sách Bài tập Giải tích 12
3. http://mathblog.org/phuong-trinh-mu-va-logarit-co-ban/